フェルマーの最終定理についての考察

2012 年 10 月 17 日

目次

1　フェルマーの最終定理とは

1.1　定理の内容

フェルマーの最終定理とは、

3 以上の自然数 n について、

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない

という定理である。

1.2　歴史

1.2.1　フェルマー予想の誕生

3 世紀ごろ、ディオファントスが『算術』を書き（ギリシャ語)、

17 世紀にバシェがそれをラテン語に翻訳して出版

1637 年、ピエール・ド・フェルマーがラテン語版『算術』を読み、その余白に、のちにフェルマー予想と言われる発見を書いた。

フェルマーの死後、彼の息子サミュエルが、フェルマーの書き込み入り『算術』を刊行。

こうしてフェルマー予想が世間に知られるようになった。

1.2.2　初等整数論の時代

1640 年、フェルマー自身が $n = 4$ について証明

1770 年、オイラーが $n = 3$ について証明

1820 年、ディリクレ・ルジャンドルが $n = 5$ について証明

1839 年ラメが $n = 7$ について証明

1.2.3　代数的整数論の時代

1823 年、ソフィ・ジェルマンが《p と $2p+1$ の両方が 2 以外の素数のとき、$x^p + y^p = z^p$ は解を持たない。ただし、xyz は p の倍数でないとき》を証明。

1847 年クンマーが n か正則素数の場合について証明。

1.2.4　幾何学的数論の時代

1955 年、《全ての楕円曲線はモジュラーである》という内容の「谷山・志村の予想」が提示される当時は、この予想がフェルマー予想に繋がるとは思われていなかった。

1984 年、《谷山・志村の予想が正しければ、フェルマー予想も正しい*1》という、「フライ・セール予想」が提示される。

1993 年、ワイルズが《全ての “半安定な” 楕円曲線はモジュラーである》を証明。

フェルマー予想の証明にはこれで十分だった。

ところが、この証明に 1 ヶ所誤りが見つかる。

1994 年、彼の教え子であるリチャード・テイラーの力を借りて、障害を回避。新証明を発表。

1995 年 10 月、これに誤りが無いことが確認された。こうして、フェルマー予想が生まれて約 360 年後、予想は《フェルマーの最終定理》となった。

2　研究内容

フェルマーの最終定理において、n が自然数以外の値をとるとき、
x, y, z が自然数解を持つのはどのような時かを調べる

2.1　注意

$x^k \leq y^k$ としても本質的に問題はないので、
以降は断りがない限り $x^k \leq y^k$ であるものとする。

さらに、x, y, z が 1 より大きい公約数を持つとき、それぞれを 3 数の最大公約数で割ってできる数の組も、方程式を満たすから、$gcd(x, y, z) = 1$ となる場合のみ考えればよい。(このとき x, y, z は**互いに素**という。)
ただし、媒介変数表示を考えるため（全ての組み合わせを網羅するために)、互いに素でない場合も考慮する。

*1 フェルマー予想が偽だと仮定すると、フェルマー予想の反例 $a^n + b^n = c^n$ から、$y^n = x(x - a^n)(x + b^n)$ という、モジュラーでない楕円曲線 (フライ曲線) が得られるが、谷山・志村の予想が正しければそれに矛盾する、よってフェルマー予想は真 (背理法)

3　n が整数値をとるとき

以下で、方程式 $x^k + y^k = z^k$ を、“$n = k$ **のときのフェルマー式**” と呼ぶ。
また、それに $gcm(x, y, z) = 1$ の制限をかけたものを $FLT[k]$ と呼ぶ。

3.1　$n = 0, n \leq -3$ のとき

3.1.1　$n = 0$ のとき

$n = 0$ のとき、$x^n + y^n = z^n$ は、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= x^0 + y^0 = 1 + 1 = 2 \\ (\text{右辺}) &= z^0 = 1\end{aligned}$$

となるから、
これを満たす自然数 x, y, z は存在しない。

3.1.2　$n \leq -3$ のとき

$n \leq -3$ のとき、$x^n + y^n = z^n$ の両辺に $(xyz)^{-n}$ をかけると

$$(yz)^{-n} + (zx)^{-n} = (xy)^{-n} \tag{2}$$

となり、$-n \geq 3, x, y, z \in \mathbb{N}$ であるから、
フェルマーの最終定理より、これを満たす自然数 x, y, z は存在しない。

3.2　$n = -1$ のとき

3.2.1　解の存在

足し算の式

$$a + b = c \tag{3}$$

の両辺を abc で割ると、

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{ab} \tag{4}$$

となり、(3) を満たす自然数 a, b, c を用いて (bc, ca, ab) と表される数の組は、
$n = -1$ のときのフェルマー式を満たすことがわかる。
よって、$n = -1$ のときのフェルマー式の自然数解は存在する

3.2.2　媒介変数表示

(3) を満たす自然数のうち、3 数とも互いに素なものは、p, q ($\in \mathbb{N}, p \perp q$)[*2]を用いて、

$$\big(p, q, p+q\big)$$

と表される。
よって、$n = -1$ のときのフェルマー式を満たす自然数の組のうち、3 数の最大公約数が 1 であるものは、互いに素な自然数 p, q を用いて

$$\big(q(p+q), p(p+q), pq\big)$$

と表される。
また、この 3 数をそれぞれ自然数倍してできる 3 数の組もまた、$n = -1$ のときのフェルマー式を満たすので、自然数 d を導入して、

$$\big(dq(p+q), dp(p+q), dpq\big)$$

と表される 3 数は、$n = -1$ のときのフェルマー式を満たす。

3.2.3　媒介変数表示の必要十分性

3.2.2 で示した媒介変数表示が、$n = -1$ のときのフェルマー式を満たすための十分条件であることは分かったが、これが必要十分条件なのかどうかを考える、

ここでは、$n = 1$ のときのフェルマー式を満たす 3 数の組と $n = -1$ のときのフェルマー式を満たす 3 数の組が 1 対 1 に対応することを示せばよい。

手順は以下の通り

1. “$FLT[1]$ を満たす x, y, z の値と、xy 平面における (ある線分上の) 点の座標”、“$FLT[-1]$ を満たす x, y, z の値と、xy 平面における (ある線分上の) 点の座標” を 1 対 1 に対応させる
2. 点の座標を仲介として、$FLT[1], FLT[-1]$ を満たす x, y, z の値を 1 対 1 に対応させる
3. さらにその整数倍を対応付けることでフェルマー式でも 1 対 1 に対応することを示す

[*2] $p \perp q$ は、p, q は互いに素、という意味

3.3　$n=-2$ のとき

3.3.1　解の存在

3.3.2　媒介変数表示

3.3.3　媒介変数表示の必要十分性

4　n が有理数値をとるとき

4.1　$s=-2,-1,1,2$ のとき

4.2　$s\leq -3, 3\leq s$ のとき

5　今後の目標

6　参考文献